МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур 9 класс февраль 2012 год

Вариант № 1

1. Школьник купил авторучку, книгу, портфель и футбольный мяч. Если бы эти предметы стоили соответственно в 12, 6, 4 и 3 раза дешевле, то он заплатил бы 10000 *руб*. А если бы они стоили соответственно в 12, 15, 20 и 30 раз дешевле, то он заплатил бы 5000 *руб*. – Найдите стоимость покупки. – Что стоит дороже: авторучка или портфель?

2. Средняя линия треугольника ABC равна l. К сторонам AB и BC проведены срединные перпендикуляры, пересекающие AC соответственно в точках D и E, причём $AD < AE$. Чему равен периметр треугольника BDE ?

3. Расстояние между пунктами A и B равно 40 *км*. Пешеход вышел из A в 4-00. Когда он прошёл половину пути, его догнал велосипедист, который выехал из пункта A в 7-20. Час спустя пешеход встретил другого велосипедиста, который выехал из пункта B в 8-30. Найдите скорость пешехода, если оба велосипедиста ехали с одинаковой скоростью.

4. От двух кусков сплавов с разным содержанием свинца, массой 6 и 12 *кг* соответственно, отрезали части равной массы. Каждую из отрезанных частей сплавили с остатком другой; в новых сплавах процентное содержание свинца стало одинаковым. Найдите массу отрезанных частей.

5. Найдите наибольшее значение разности $x - y$, если $2(x^2 + y^2) = x + y$.

6. Найти все положительные числа *a, b, c, d* для которых $\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = \frac{3}{4}$.

7. На диагонали BD квадрата ABCD выбрана точка E. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABE и ADE. Докажите, что четырехугольник AO_1EO_2 – квадрат.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Вес	12	12	14	14	16	16	16	100

МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур 9 класс февраль 2012 год

Вариант № 2

1. Сплав из золота и серебра массой 13 *кг* 850 *г* при полном погружении в воду вытеснил 0,9 *л* воды. Определите количество золота и серебра в этом сплаве, если известно, что плотность золота равна 19,3 *кг/л*, а плотность серебра – 10,5 *кг/л*.

2. Средняя линия трапеции ABCD авна l. К боковым сторонам AB и CD провели срединные перпендикуляры, пересекающие AD соответственно в точках E и F, причём $AE < AF$. Чему равен периметр трапеции BCFE ?

3. В 6-00 путники *A* и *B* начали переход из города M в город N, лежащий в 15 *км* от M. Скорость пешего движения 6 *км/час*. Однако, у них имеется мопед, который едет со скоростью 15 *км/час*. Путник *A* отправился пешком, а *B* – на мопеде. По пути *B* встретил пешехода *C*, шедшего ему навстречу из N в M со скоростью 6 *км/час*. После встречи с *C*, путник *B* продолжил движение пеш-ком, а *C* – на мопеде. Встретив *C*, путник *A* забрал у него мопед, на котором и въехал в город N. На сколько раньше путников *A* и *B* должен выйти из N пешеход *C*, чтобы путники *A* и *B* прибыли в город N одновременно?

4. В кассе метро продаются транспортные карты на 1, 5 и 20 поездок; все карты стоят целое число десятков рублей. Пять карт на одну поездку стоят дороже, чем одна карта на 5 поездок, а 4 карты на 5 поездок – дороже одной карты на 20 поездок. Минимум затрат на проезд группы, состоящей из 33-х туристов, достигается, если купить карты на 35 поездок, потратив на это 330 рублей. Сколько стоит одна транспортная карта на 5 поездок?

5. Найдите положительные решения уравнения $y(y+1)^2 + x(x+1)^2 = 8xy$.

6. Докажите, что, если $(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$, то $x + y = 0$.

7. На сторонах BC и CD параллелограмма ABCD во внешнюю сторону построены правильные треугольники BCK и CDM. Докажите, что AKM – правильный треугольник.

МГТУ имени Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее», 2 тур

9 класс **февраль 2012 год**

Решения. Вариант № 1

1. Пусть x, y, z, t, т.р. – стоимости авторучки, книги, портфеля и мяча. Сум-марная стоимость составит $x+y+z+t=S$; или $60x+60y+60z+60t=60S$.
Тогда, по первому условию: $5x+10y+15z+20t$ = 10 т.р. или $x+2y+3z+4t$=2 т.р., а по второму условию: $5x+4y+3z+2t$ = 5·т.р. Складывая эти равенства, полу-чим, $x+y+z+t$ = S = 7/6 т.р. Поэтому последние равенства можно записать в виде $y+2z+3t$ = 2–7/6 = 5/6 т.р., $3x+2y+z$ = 5–7/3 = 8/3 т.р.; следовательно, y = 5/6–2z–3t, и 2y = 8/3–z–3x, откуда 5/3–4z–6t = 8/3–z–3x, а также 3x = 1+3z+ + 6t > 3z . Значит, имеем

Ответ: авторучка дороже портфеля.

2. *Ответ*: 2*l*.

3. Из условия задачи следует, что к моменту встречи второго велосипеди-ста с пешеходом, второй велосипедист был в пути на 1 час 10 мин меньше, чем первый. Если бы он выехал одновременно с первым велосипедистом, то оказался бы на середине пути на 1 час раньше момента своей встречи с пешеходом. Следовательно, ему понадобилось бы только 10 мин, чтобы проехать путь от места встречи с пешеходом до середины пути. Это же рас-стояние пешеход проходит за час. Следовательно, скорость велосипедиста в 6 раз больше скорости пешехода. Составим уравнение, сравнив время, за которое пешеход и первый велосипедист проходят полпути (20 *км*). Пешеход затратил больше времени на 7 час 20 мин – 4 ч = 3 ч 20 мин = = 31/3ч, чем первый велосипедист. Пусть x – скорость пешехода. Время, затраченное на путь в 20 *км*, равно 20/x. Скорость велосипедиста 6x(*км/ч*). Время велосипедиста 20/6x. Разность 20/x-20/6x = 31/3, откуда x = 5.

Ответ: Скорость пешехода 5 *км/ч*.

4. Пусть x – процентное содержание свинца в первом сплаве, y – про-центное содержание свинца во втором сплаве. Пусть от каждого куска отре-зали по z *кг* и прибавили столько же килограммов другого сплава. Тогда процентное содержание свинца в первом куске стало:

$$(((6-z)x)/100+yz/100)\cdot 100/6 = (6x-zx+yz)/6.$$

Процентное содержание свинца во втором куске:

$$(((12-z)y)/100+xz/100)\cdot 100/12 = (12y-zy+xz)/12.$$

Получим уравнение $2(6x-zx+yz) = 12y-zy+xz$, $12(x-y) -3z(x-y) = 0$, $z = 4$ $x \neq y$.

Ответ 4.

5. Из формулы $2(x^2+y^2)=x+y$ вытекает, что $2(x+y)^2=x+y+4xy,$ $2(x-y)^2=x+y-4xy,$ обозначив $x+y=u,\ x-y=w,$ из предыдущих полу-чим следующие равенства: $2u^2=u+4xy,\ 2w^2=u-4xy,$ складывая которые найдём, что $u^2+w^2=u$. Квадратный трёхчлен $u-u^2$ имеет наибольшее значение $\frac{1}{4}$ и принимает его в точке $u=\frac{1}{2}$. Поэтому $w=(x-y)^2 \le \frac{1}{4}$, а $(x-y)_{наиб.}=\frac{1}{2}.$ Из линейной системы $\begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases}$ находим $x=\frac{1}{2},\ y=0$, на которых достигается наибольшее значение $x-y$, равное $\frac{1}{2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$.

6. Введем обозначения: $x=2a+b+c, y=2b+c+a, z=2c+a+b$. Тогда

$a+b+c = x-a = y-b = z-c$, и поскольку $x+y+z = 4(a+b+c)=4x-4a$, то $4a = 3x-y-z$. Сделав круговую перестановку переменных x, y, z, найдем аналогичные выражения для b, c: $4b = 3y - z - x$, $4c = 3z - x - y$. После подстановки найден-
ных формул в данное равенство, оно принимает вид

$$\frac{3x-y-z}{x}+\frac{3y-z-x}{y}+\frac{3z-x-y}{z}=3, \text{ или } (\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})+(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})=6.$$

Так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2 и равна 2 только в случае их равенства, то $x = y = z$, а тогда $a = b = c = t \in \mathbf{R}$.

Ответ: $a = b = c = t \in \mathbf{R}$.

7. Решение 1. По теореме синусов, из ΔABE найдём $AE = 2O_1A \cdot \sin\angle ABE = \sqrt{2}O_1A$ (рис. 1). Аналогично из ΔADE имеем $AE = \sqrt{2}O_2A$. Отсюда $O_1A=O_1E=O_2E=O_2A$ и следовательно, AO_1EO_2 – ромб. Осталось заметить, что $\angle AO_1E = 2\angle ABE = 90^\circ$.

Решение 2. Так как $O_1A=O_1E$, $O_2A=O_2E$, то ΔAO_1O_2 и ΔEO_1O_2 равны. Следо-вательно, $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$. Из равенств

$\angle AO_1E = 2\angle ABE = 90^\circ$ и $\angle AO_2E = 2\angle ADE = 90^\circ$ получим, $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2 = 90^\circ$.

Таким образом, AO_1EO_2 – прямоугольник, симметричный относительно диагонали O_1O_2, то есть – квадрат.

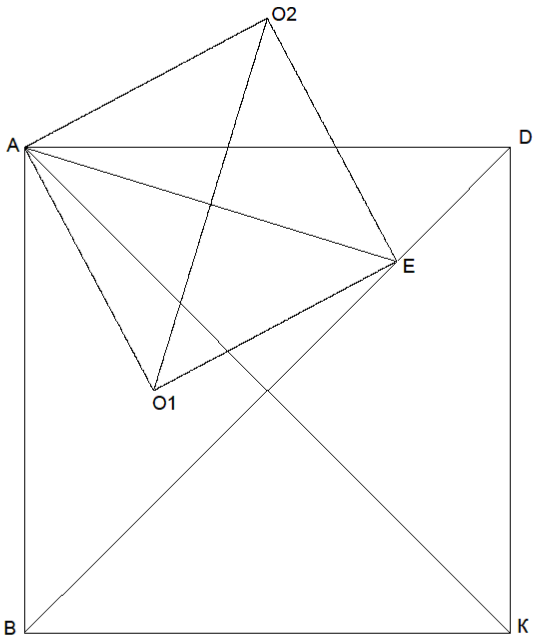


Рис.1

Решения. Вариант № 2

1. Задачу можно решить алгебраически и арифметически.

1-й способ. Пусть золота в сплаве x *кг*, серебра – y *кг*. Объём сплава 0,9 дм^3. Тогда $x + y = 13{,}85$ и $x/19{,}3+y/10{,}5 = 0{,}9$. Решая получившуюся систему, находим $x = 9{,}65$ *кг*, $y = 4{,}2$ *кг*.

2-й способ. Предположим, что все 0,9 дм^3 – это золото, его масса будет $0{,}9\cdot19{,}3 = 17{,}37$ *кг*. Лишние $17{,}37 - 13{,}85 = 3{,}52$ *кг* получились из-за замены некоторого количества кубических дециметров серебра золотом. Каждый 1 дм^3 золота на $19{,}3 - 10{,}5=8{,}8$ *кг* тяжелее 1 дм^3 серебра. Следовательно, серебра было $3{,}52:8{,}8 = 0{,}4$ дм^3. Масса серебра: $0{,}4\cdot10{,}5 = 4{,}2$ *кг*, золота: $13{,}85 - 4{,}2 = 9{,}65$ *кг*. *Ответ*: золота – 9,65 *кг*, серебра – 4,2 *кг*.

2. *Ответ*: $2l$

3. Чтобы путники A и B прибыли в пункт N, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на мопеде одно и то же расстояние $15 - x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на мопеде $15 - 2x$, а после этого A проедет на мопеде $15 - x$. Всего A и C вместе проедут на мопеде $30 - 3x$.

За это же время B пройдёт пешком x, поэтому $\frac{30-3x}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $x = 60/11$. Путник B до встречи с C едет $\frac{15-x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{105}{11} = \frac{7}{11}$ час, а C до встречи с B идёт $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{11} = \frac{10}{11}$ час, поэтому пешеход C должен выйти из N за $\frac{3}{11}$ часа до того, как A и B отправятся в путь из M. *Ответ*: на $\frac{3}{11}$ часа раньше.

4. Поскольку числа 5, 20 и 35 делятся на 5, то число купленных карт на одну поездку делится на 5. Однако, выгоднее заменить каждые 5 таких карт одну карту на 5 поездок. Следовательно, карты на одну поездку брать не надо. По тем же причинам, выгоднее всего купить 3 карты на 5 поездок и одну карту – на 20 поездок, именно такой набор карт стоит 330 рублей, а семь карт на 5 поездок стоят дороже. Следовательно, карта на 5 поездок стоит не меньше 50 рублей. С другой стороны, по условию, оплатить 35 поездок выгоднее, чем купить две карты на 20 поездок, так как три карты на 5 поездок дешевле одной на 20 поездок. Следовательно, шесть карт на 5 поездок стоят дешевле 330 рублей; значит, одна такая карта стоит не больше 50 рублей. *Ответ*: 50 рублей.

5. Умножая обе части данного равенства на $\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}$, найдем равенство $-\mathbf{y} - \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1} = \mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}$. Аналогично, умножая обе части равенства на $\mathbf{y} - \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}$, найдем равенство $-\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 + 1} = \mathbf{y} - \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}$. Складывая эти ра-венства, получим $-(x+y) = x+y$, равносильное искомому равенству $x+y = 0$.

6. Так как $(\mathbf{a} + 1)^2 \geq 4\mathbf{a}$ при любом a, то $a(a+1)^2 \geq 4a^2$ при $a \geq 0$,– значит

$$\mathbf{y}(\mathbf{y} + 1)^2 + \mathbf{x}(\mathbf{x} + 1)^2 \geq 4(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \geq 8\mathbf{xy}.$$

Использованное неравенство превращается в равенство только при $a = 1$, и поэтому из данного уравнения следует, что $\mathbf{x}(\mathbf{x} + 1)^2 = 4\mathbf{x}^2, \mathbf{x} = \mathbf{y}$, так что уравнение имеет единственное решение в положительных числах: $x = y = 1$

7. Треугольники ABK, ADM, KCM равны между собой (рис. 2). У них есть по паре равных сторон, кроме того равны соответственные углы. Если, например, $\angle BAD = \alpha \leq 60^o$, то $\angle ABK =$ $= 360^o - (\angle ABC + 60^o) = 60^o - (180^o - \alpha + 60^o) = 120^o + \alpha$, $\angle KCM = \alpha + 120^o$.

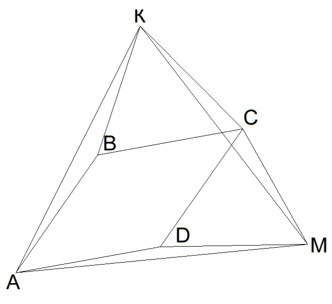


Рис.2

МГТУ имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур 10 класс февраль 2012 год
Вариант № 1

1. Натуральное число N записано в виде цифровой строки, состоящей из 121 цифры, среди которых встречаются только единица, тройка и пятерка, причем число единиц на 11 больше числа пятерок. Чему равен остаток от деления числа N на 9 ?

2. Найдите значение $\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18}+\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}}$.

3. Решите неравенство
$$\frac{x^{2012}-2025\cdot x^{2010}+x^2+4\cdot x-4}{|x^{2012}-2025\cdot x^{2010}-x^2-4\cdot x+5|+1}\ge 1.$$

4. Отрезки дороги соединяют населенные пункты A, B, C. Два квадратных участка леса примыкают к отрезку BC, а также – к половине отрезка AB; вдоль отрезка AC лежит поле шириной 4 км. Найдите площадь этого поля и наименьшую длину дороги ABC, если площадь поля на 20 кв. км больше суммарной площади участков леса.

5. Найдите наименьшее значение выражения
$$\sqrt{(x+5)^2+y^2+(z-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-7)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2+(z+9)^2}.$$
Укажите x, y, z, при которых достигается это наименьшее значение.

6. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. На отрезке AC отмечены точки P, T, такие, что AP<AT<AC. Точка M лежит на середине отрезка BC. Отрезки BP и BT рассекают треугольник ABM на равновеликие треугольники: ABQ, QBO, OBM. Найдите отношение площадей треугольников ABP, PBT, TBC.

7. Решите неравенство с параметром
$$\frac{x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-a+1}{|x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+a|+1}\le 1.$$

8. Сколько окружностей можно провести через 12 точек, из которых никакие четыре точки не лежат на одной окружности и никакие три не лежат на одной прямой ?

9. В тетраэдре ABCD все плоские углы при вершине D содержат по 90°. Точка T удалена от вершины D на 6 м, а от вершин A, B, C – соответственно на $\sqrt{20}, \sqrt{24}$ и $\sqrt{28}$ м. Найдите расстояние от точки T до плоскости ABC.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вес	8	8	8	10	12	12	14	14	14

МГТУ имени Н.Э. Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур 10 класс февраль 2012 год
Вариант № 2

1. Натуральное число N записано в виде цифровой строки, состоящей из 141 цифры, среди которых встречаются только пятерка, семерка и девятка, причем число девяток на 99 меньше числа пятерок. Чему равен остаток от деления числа N на 9 ?

2. Найдите значение $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

3. Решите неравенство
$$\frac{x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-2010}{|x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+2011|+1}\le 1.$$

4. Отрезки дороги соединяют населенные пункты A, B, C. Два квадратных участка леса примыкают к отрезку BC, а также – к половине отрезка AB; вдоль отрезка AC лежит поле шириной 6 км. Найдите площадь этого поля и наименьшую длину дороги ABC, если площадь поля на 45 кв. км больше суммарной площади участков леса.

5. Найдите наименьшее значение выражения
$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+(z-4)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-6)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+10)^2}.$$
Укажите x, y, z, при которых достигается это наименьшее значение.

6. В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении 2:1, считая от вершины A; точка P делит сторону BC в отношении 3:1, считая от вершины B; точка B_1 делит сторону AC пополам. Отрезки BB_1 и PK пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника B_1MPC равна 17.

7. Решите неравенство с параметром
$$\frac{x^{2012}-2025\cdot x^{2010}+x^2+4\cdot x-a+1}{|x^{2012}-2025\cdot x^{2010}-x^2-4\cdot x+a|+1}\ge 1.$$

8. Сколько различных плоскостей можно провести через 12 точек пространства, из которых никакие четыре точки не лежат в одной плоскости?

9. В тетраэдре ABCD все плоские углы при вершине D содержат по 90°. Точка T удалена от вершины D на 9 *м*, а от вершин A, B, C – соответственно на $\sqrt{45}, \sqrt{54}$ и $\sqrt{63}$ *м*. Найдите расстояние от точки T до плоскости ABC.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вес	8	8	8	10	12	12	14	14	14

10 класс **февраль 2012 год**

МГТУ имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее», 2 тур

Решения задач

Задание 1. 1-й вариант: {8}; 2-й вариант {6}.

1-й вариант. *Решение*. Введем обозначения: $\nu_1 -$ количество *единиц*, $\nu_3 -$ количество *троек*, $\nu_5 -$ количество *пятерок*, $\sigma -$ сумма цифр данного числа. Ввиду условия задачи, выполнена система условий

$$\begin{cases} \nu_5 = \nu_1 - 11, \\ \nu_1 + \nu_3 + \nu_5 = 121, \\ \sigma = 1\cdot\nu_1 + 3\cdot\nu_3 + 5\cdot\nu_5. \end{cases}$$

Выразим $\nu_3 = 121 - \nu_1 - \nu_5 = 121 - \nu_1 - (\nu_1 - 11) = 132 - 2\nu_1$ и вычислим сумму

$$\sigma = 1\cdot\nu_1 + 3\cdot\nu_3 + 5\cdot\nu_5 = 1\cdot\nu_1 + 3\cdot(132 - 2\nu_1) + 5\cdot(\nu_1 - 11) = 396 - 55 = 341.$$

Воспользуемся леммой об остатке при делении числа на 9 и найдём, что остаток от деления числа 341 на 9 равен 8.

Задание 2. 1-й вариант: 3; 2-й вариант: 4.

1-й вариант. *Решение*. Введём обозначения: $V = \sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} + \sqrt[3]{18-5\sqrt{13}}$

$$t = \sqrt[3]{5\sqrt{13}+18},\ t^{-1} = -\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}},$$

$$V^3 = 5\sqrt{13} + 18 + 18 - 5\sqrt{13} - 3V \Leftrightarrow V^3 + 3V - 36 = 0.$$

$V = 3 -$ корень этого уравнения. Для нахождения других корней воспользуемся схемой Горнера:

$|1|0|3|-36$

$3|1|3|12|0$. Уравнение $V^2 + 3V + 12 = 0$ не имеет корней, значит $V = 3$.

Задание 3. 1-й вариант. *Решим* неравенство

$$\frac{x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} + x^2 + 4\cdot x - 4}{|x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} - x^2 - 4\cdot x + 5| + 1} \ge 1.$$

Алгебраическая модель для решения этого неравенства имеет вид

$$\frac{g}{|f|+1} \ge 1 \Leftrightarrow g \ge |f| + 1 \Leftrightarrow |f| \le g - 1 \Leftrightarrow -(g-1) \le f \le g - 1.$$

Имеем $\begin{cases} x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} - x^2 - 4\cdot x + 5 \le \\ \quad \le x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} + x^2 + 4\cdot x - 5, \\ x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} - x^2 - 4\cdot x + 5 \ge \\ \quad \ge -(x^{2012} - 2025\cdot x^{2010} + x^2 + 4\cdot x - 5) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4\cdot x - 5 \ge 0, \\ x^{2010}\cdot(x^2 - 2025) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5) \ge 0, \\ x^{2010}\cdot(x-45)(x+45) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -45, \\ x = 0, \\ x \ge 45. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -45, \\ x \ge 45. \end{array}\right.$$ *Ответ:* $(-\infty;-45]\cup[45;+\infty)$.

Задание 3. 2-й вариант. *Решим* неравенство

$$\frac{x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-2010}{|x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+2011|+1}\le 1.$$

Алгебраическая модель для решения этого неравенства имеет вид

$$\frac{g}{|f|+1}\le 1 \Leftrightarrow g\le |f|+1 \Leftrightarrow |f|\ge g-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ge g-1, \\ f\le -(g-1). \end{array}\right.$$

В нашем случае $\left[\begin{array}{l} x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+2011\ge \\ \ge x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-2011, \\ x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+2011\le \\ \le -(x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-2011) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x^2+2010\cdot x-2011)\le 0, \\ 2x^{2011}\cdot(x+2012)\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2011\le x\le 1, \\ -2012\le x\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2012\le x\le 1.$$

Ответ :$[-2012;1]$.

Задание 4. 1-й вариант: 40 кв. км, 10 км; 2-й вариант: 90 кв. км, 15 км.

1-й вариант. *Решение*. Запишем условие задачи, используя обозначения на рис. 1: $4b=\left(\frac{c}{2}\right)^2+a^2+20 \Leftrightarrow b=\frac{c}{16}^2+\frac{a^2}{4}+5.$ Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $a+c>b$, а если точки A, B, C лежат на одной прямой, то $a+c=b.$ Таким образом, $a+c\ge \frac{c}{16}^2+\frac{a^2}{4}+5 \Leftrightarrow (\frac{c}{4}-2)^2+(\frac{a}{2}-1)^2\le 0.$ Отсюда вытекает, что задача имеет решение только, если c = 8 км, a = 2 км, b = 10 км; при этом поле имеет площадь 40 кв. км, дорога ABC имеет наименьшую длину b = 10 км.

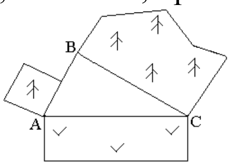


рис. 1

Задание 5. 1-й вариант: $\text{Q}(1,2,3),\ 12\sqrt{2}+3\sqrt{11}$; 2-й вариант: $\text{Q}(2,2,2),\ 12\sqrt{2}+3\sqrt{11}.$

1-й вариант. *Решение*. Данная формула выражает сумму расстояний от точки M(x, y, z) до вершин четырехугольника; запишем координаты его вершин A, B, C, D. Обоснуем, что прямые (AC) и (BD) лежат в одной плоскости, это означа-ет, что четырехугольник ABCD плоский. По проекциям на координатные плос-кости установим, что четырехугольник ABCD выпуклый. Воспользуемся теоре-мой о положении внутренней точки выпуклого четырехугольника с наимень-шей суммой расстояний от всех его вершин. Найдём точку Q пересечения диагоналей AC и BD и сумму длин AC и BD. Запишем ответ.

Задание 6. 1-й вариант: 2:3:5; 2-й вариант: 52.

1-й вариант. *Решение*. Заметим, что $\text{AQ}=\text{QO}=\text{OM},\ \text{AO}:\text{OM}=2:1,$ – значит, точка O лежит на пересечении медиан $\Delta\,\text{ABC}$, в частности, BT – медиана $\Delta\,\text{ABC}$. Если $\text{AC}=2u$, то $\text{AT}\ =\text{TC}=u$ (рис.2-1). По теореме о радиус-векторе точки,

$$\Delta\,\mathrm{ABC}:\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{u+3}{2u}\vec{a}+\frac{u\text{-}3}{2u}\vec{c},$$

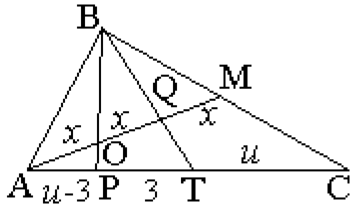


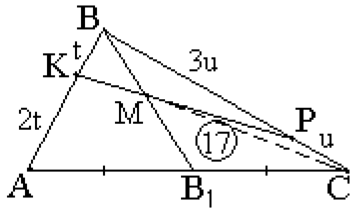
Рис. 2-1

$$\Delta\,\mathrm{ABM}:\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\cdot\vec{c};$$

из коллинеарности векторов $\overrightarrow{\mathrm{BP}}, \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ вытекает равенство $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, которое, с учётом предыдущих равенств позволяет получить систему уравнений

$$\frac{u+3}{2u}=\frac{2\lambda}{3},\quad \frac{u\text{-}3}{2u}=\frac{\lambda}{3}.$$

Поделим почленно первое уравнение этой системы на второе уравнение и получим равенство $\frac{u+3}{u\text{-}3}=4$, из которого находим $u=5$, из которого вытекает, что $S_{\mathrm{ABP}}:S_{\mathrm{PBT}}:S_{\mathrm{TBC}}=2:3:5$.



2-й вариант. *Решение*. $S_{\mathrm{ABB_1}}=S_{\mathrm{B_1BC}}=0,5S_0=S_1$. По тео-реме Менелая для $\Delta\,\mathrm{ABC}$ имеем $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{x}{2u+x}=1\Leftrightarrow 5x=2u$, откуда, с учётом равенства $b=2u$, вытекает, что $x=\frac{b}{5}$.

Рис. 2-2

По теореме Менелая для $\Delta\,\mathrm{B_1BC}$: $\frac{\mathrm{B_1M}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{x}{u+x}=1\Leftrightarrow\frac{\mathrm{B_1M}}{\mathrm{MB}}=\frac{x+u}{3x}=\frac{\frac{x}{u}+1}{3\cdot\frac{x}{u}}=\frac{\frac{2}{5}+1}{3\cdot\frac{2}{5}}=\frac{7}{6}.$

Значит, $\frac{S_{\mathrm{BMC}}}{S_{\mathrm{B_1BC}}}=\frac{6}{13},\ \frac{S_{\mathrm{BMP}}}{S_{\mathrm{BMC}}}=\frac{3}{4},\ S_{\mathrm{BMP}}=\frac{3}{4}\cdot S_{\mathrm{BMC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{13}\cdot S_{\mathrm{B_1BC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{S_0}{2}=\frac{9}{52}S_0$ (рис.2-2). По условию задачи, $\frac{9}{52}S_0+17=\frac{1}{2}S_0$, откуда находим $S_0=52$.

<u>Задание 7</u>. 1-й вариант. *Решим* неравенство

$$\frac{x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-a+1}{|x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+a|+1}\le 1$$

Алгебраическая модель для решения этого неравенства имеет вид

$$\frac{g}{|f|+1}\le 1\Leftrightarrow g\le|f|+1\Leftrightarrow|f|\ge g-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\ge g-1,\\ f\le-(g-1).\end{array}\right.$$

В данном случае получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+a\ge\\ \quad\ge x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-a,\\ x^{2012}+2012\cdot x^{2011}-x^2-2010\cdot x+a\le\\ \quad\le-(x^{2012}+2012\cdot x^{2011}+x^2+2010\cdot x-a)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2(x^2+2010\cdot x-a)\le 0,\\ 2x^{2011}\cdot(x+2012)\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+2010\cdot x-a\le 0,\\ -2012\le x\le 0.\end{array}\right.$$

Воспользуемся графическим решением (рис.3-1).

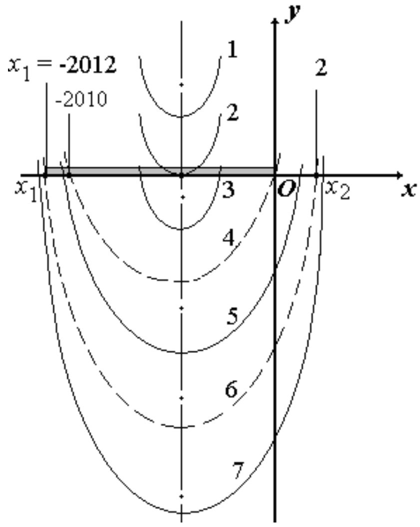


Рис. 3-1. Линии 1-7 – шаблоны графика функции $y = x^2 + 2010 \cdot x : x_в = -1005$

1. $a < a_1 = -1005^2,\ D < 0$; **2.** $a = a_1,\ D = 0$; **3.** $a_1 < a < 0,\ D > 0$;

4. $a = 0$; **5.** $0 < a < 4024$; **6.** $a = a_2 = 4024$; **7.** $a > 4024$.

$$Ответ: a \le 0 \to [-2012;0],\ 0 < a \le 4024 \to [-2012; \sqrt{1005^2 + a} - 1005],$$
$$a > 4024 \to [-1005 - \sqrt{1005^2 + a}; \sqrt{1005^2 + a} - 1005].$$

<u>Задание 7</u>. 2-й вариант. *Решим* неравенство

$$\frac{x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} + x^2 + 4 \cdot x - a + 1}{|\,x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} - x^2 - 4 \cdot x + a\,| + 1} \ge 1.$$

Алгебраическая модель для решения этого неравенства имеет вид

$$\frac{g}{|\,f\,| + 1} \ge 1 \Leftrightarrow g \ge |\,f\,| + 1 \Leftrightarrow |\,f\,| \le g - 1 \Leftrightarrow -(g-1) \le f \le g - 1.$$

В данном случае получаем систему

$$\begin{cases} x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} - x^2 - 4 \cdot x + a \le \\ \qquad \le x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} + x^2 + 4 \cdot x - a, \\ x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} - x^2 - 4 \cdot x + a \ge \\ \qquad \ge -(x^{2012} - 2025 \cdot x^{2010} + x^2 + 4 \cdot x - a) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 \cdot x - a \ge 0, \\ x^{2010} \cdot (x^2 - 2025) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 \cdot x - a \ge 0, \\ x^{2010} \cdot (x - 45)(x + 45) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 \cdot x - a \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -45, \\ x = 0, \\ x \ge 45. \end{array} \right. \end{cases}$$

Воспользуемся графическим решением (рис.3-2).

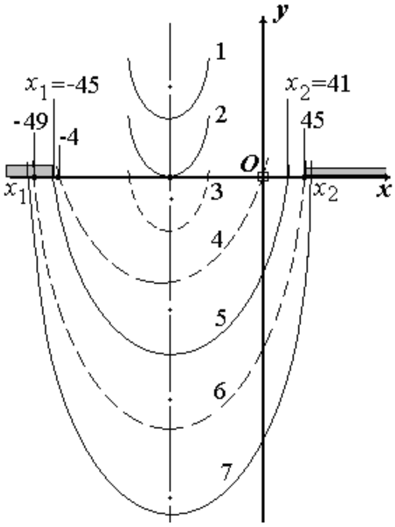


Рис. 3-2. Линии 1-7 – шаблоны графика функции $y = x^2 + 4 \cdot x$: $x_в = -2$

1. $a < a_1 = -4,\ D < 0$; **2.** $a = a_1,\ D = 0$; **3.** $-4 < a < 0,\ D > 0$; **4.** $a = 0$; **5.** $a = 1845$; **6.** $a = 2205$; **7.** $a > 2205$.

$$Ответ: a \le -4 \to (-\infty; -45] \cup [45; +\infty) \cup \{0\},$$
$$-4 < a \le 1845 \to (-\infty; -45] \cup [45; +\infty),$$
$$1845 < a \le 2205 \to (-\infty; -2 - \sqrt{4 + a}] \cup [45; +\infty),$$
$$a > 2205 \to (-\infty; -2 - \sqrt{4 + a}] \cup [\sqrt{4 + a} - 2; +\infty).$$

Задание 8. 1-й вариант: 220; 2-й вариант: 220.

2-й вариант. *Решение*. Каждая плоскость однозначно определена тремя не-коллинеарными точками, поэтому число различных плоскостей равно $C_{10}^{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3! \cdot 9!} = 220.$

Задание 9. 1-й вариант: $\frac{24}{\sqrt{39}}$; 2-й вариант: $\frac{36}{\sqrt{39}}$.

1-й вариант. *Решение*. 1. Введём декартову систему координат: ось абсцисс направим вдоль ребра DA; ось ординат – вдоль DB; ось аппликат – вдоль DC; точки $\mathrm{A}(a, 0, 0),\ \mathrm{B}(0, b, 0),\ \mathrm{C}(0, 0, c)$; будем считать $a > 0, b > 0, c > 0.$ Запишем условия на неизвестную точку К(*x*, *y*, *z*):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ (x - a)^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ x^2 + (y - b)^2 + z^2 = 24, \\ x^2 + y^2 + (z - c)^2 = 28. \end{cases}$$

– Получили систему четырёх уравнений с шестью неизвестными: $x, a,\ y, b,\ z, c.$

Сложим второе, третье и четвёртое уравнения, из суммы вычтем удвоенное первое уравнение и получим $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$. Отсюда вытекают равенства: $x = a,\ y = b,\ z = c$, – подстановка которых в систему четырёх уравне-ний позволяет получить систему линейных уравнений относительно $x^2,\ y^2,\ z^2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y^2 + z^2 = 20, \\ x^2 + z^2 = 24, \\ x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $x^2 = 16,\ y^2 = 12,\ z^2 = 8$; её положительные корни суть $x = 4,\ y = 2\sqrt{3},\ z = 2\sqrt{2}$; таким образом $\mathrm{K}(4, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$.

2. Запишем уравнение плоскости (ABC) в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Расстояние от точки K до плоскости (ABC) равно $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$. В данном случае

$$d = \frac{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{96+128+192}} = \frac{32\sqrt{6}}{\sqrt{416}} = \frac{32}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{26}} = \frac{24}{\sqrt{39}}.$$